Die
Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Kaiser Wilhelms-Universität in Straßburg zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Schlusser
in Karlsruhe i. B.

ACAD. LAND. RAT. BIBL.

Leipzig
Druck von August Hoffmann
Spezialdruckerei für Dissertationen
1912.

Inhalt.

Seite

Einleitung 5

I. Allgemeine Eigenschaften einer linearen Strahlenkongruenz 6

II. Das Fokalparaboloid 12

III. Die mit einer Fokalregelschar verbundenen Flächen . . 24

IV. Polarsysteme 1. und 2. Art einer linearen Strahlenkongruenz 29

V. Konfokale lineare Strahlenkongruenzen. (Das Hauptachsenzylindroid) 39

VI. Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz 47

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548024_0069

Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen und einige damit eng zusammenhängende Sätze über das Hauptachsenzylindroid hat Herr Jolles im 63. Bande der Mathematischen Annalen gegeben[1]). Die Untersuchungen sind hier rein synthetisch geführt, und die Beweise bieten daher, namentlich wenn es sich um imaginäre Gebilde handelt, oft Schwierigkeiten, die nur durch umständliche, weitausgreifende Hülfsmittel überwunden werden können. Versuchen wir aber, die Jolles'schen Resultate auf analytischem Wege herzuleiten, so zeigt sich, daß nicht nur die Übertragung auf imaginäre Gebilde ohne weiteres möglich ist, sondern daß überhaupt die Beweisführung eine viel einfachere und übersichtlichere Gestalt annimmt. Wir haben also im folgenden zunächst nach einer analytischen Darstellung der Kongruenz zu suchen, die die Grundlage einer möglichst einfachen Entwickelung der Fokaltheorie gibt. Während aber Herr Jolles das Fokalparaboloïd als eine Fläche definiert, die von den sogenannten „Mittel-Ebenen" der linearen Strahlenkongruenz eingehüllt wird, wollen wir ausgehen von den in der Kongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen, deren Rotationsachsen bestimmen und das

[1]) Einige wichtige Fokaleigenschaften finden sich auch schon bei: R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie. Leipzig 1892. 1. Teil § 121.

Die hauptsächlichsten Jolles'schen Resultate sind in der Reye'schen „Geometrie der Lage", 4. Auflage. 2. Abteilung, Seite 287 angeführt.

Fokalparaboloïd als den geometrischen Ort dieser Rotationsachsen definieren. Die Polareigenschaften des Fokalparaboloids werden uns Veranlassung geben zu einigen allgemeineren Betrachtungen über die Polarsysteme, für die eine lineare Kongruenz invariant ist, und es wird sich darum handeln, eine analytische Darstellung der „primären" und „sekundären" polaren Räume, wie Herr Jolles diese Systeme an anderer Stelle[1]) genannt hat, zu finden. Sämtliche Polareigenschaften des Fokalparaboloids lassen sich dann leicht als spezielle Fälle dieser allgemeineren Sätze nachweisen. Indem wir dann umgekehrt das Paraboloid und die Involutionen seiner Regelstrahlen als gegeben betrachten, werden wir zur Theorie der „konfokalen" linearen Strahlenkongruenzen geführt, an die sich einige Sätze über das Hauptachsenzylindroid und die Beziehungen zwischen Zylindroid und Fokalparaboloid anschließen. Endlich wären noch die gefundenen Resultate auf den speziellen Fall der „rotatorischen" linearen Kongruenz zu übertragen.

I. Allgemeine Eigenschaften einer linearen Strahlenkongruenz.

Wir denken uns eine lineare Strahlenkongruenz gegeben als Schnitt zweier konjugierter (nullinvarianter) Strahlenkomplexe. Zwei Komplexe (A und B) sind analytisch dargestellt durch die Gleichungen:

$$(1)\quad A.\ (a,p) \equiv a_{34}p_{12} + a_{24}p_{31} + a_{14}p_{23} + a_{23}p_{14} + a_{31}p_{24} + a_{12}p_{34} = 0$$

$$(2)\quad B.\ (b,p) \equiv b_{34}p_{12} + b_{24}p_{31} + b_{14}p_{23} + b_{23}p_{14} + b_{31}p_{24} + b_{12}p_{34} = 0$$

[1]) St. Jolles, Primäre und Sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz. Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 134, Heft 1.

wo die Größen $a_{ik} = a_{ki}$ bezw. $b_{ik} = b_{ki}$ Konstanten und die $p_{ik} = -p_{ki}$ die Linienkoordinaten ihrer Strahlen bedeuten. Sie heißen konjugiert[1]), wenn der eine durch den andern sich selbst zugeordnet ist, und wir behaupten: *die notwendige und hinreichende analytische Bedingung für die konjugierte Lage zweier linearer Strahlenkomplexe ist:*

$$(3)\quad (a, b) = a_{12} b_{34} + a_{23} b_{14} + a_{31} b_{24} + a_{14} b_{23} + a_{24} b_{31} + a_{34} b_{12} = 0$$

Zum Beweis betrachten wir zwei Geraden, die durch ihre Linienkoordinaten p_{ik} und q_{ik} gegeben seien. Nehmen wir nun an, sie wären durch den Komplex A einander zugeordnet, es wären also[2])

$$(4)\qquad \varrho\, q_{ik} = (a, p)\, a_{ik} - a \cdot p_{ik}$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und $a = a_{12} a_{34} + a_{23} a_{14} + a_{31} a_{24} \neq 0$ ist. Setzen wir ferner voraus, die Gerade p_{ik} gehöre dem Komplexe B, nicht aber dem Komplexe A an, also:

$$(5)\qquad (b, p) = 0; \quad (a, p) \neq 0;$$

Multiplizieren wir dann die in (4) enthaltenen 6 Gleichungen der Reihe nach mit $b_{l,m}$ (wo l, m die zu i, k „komplementären" Variationen der Zahlen 1, 2, 3, 4 sind) und addieren, so kommt:

$$(6)\qquad \varrho\,(b, q) = (a, p) \cdot (b, a) - a\,(b, p);$$

wo das letzte Glied wegen (5) verschwindet. Verlangen wir nun, daß die Gerade q_{ik} ebenfalls in dem Komplexe B, nicht aber in A enthalten ist, daß also

$$(b, q) = 0; \quad (a, q) \neq 0,$$

so folgt aus (6):

$$(a, b) = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

---

[1]) Reye, Geometrie der Lage II. 4. Auflage. 18. Vortrag.
[2]) Staude, Analytische Geometrie I. 1910. S. 469 ff.

Durch jeden der beiden Komplexe A und B ist eine Nullkorrelation definiert, deren Nullstrahlen die Strahlen des betr. Komplexes ausmachen:

	A	B
(7a)	$\varrho x_i = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} u_k$	$\sigma x'_k = \sum_{l=1}^{4} b_{kl} u'_l$
(7b)	$\varrho u_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x_k$	$\sigma u'_k = \sum_{l=1}^{4} \beta_{kl} x'_l$
	$(\alpha_{12} = a_{34};\ \alpha_{23} = a_{14}$ etc.)	$(\beta_{12} = b_{34};\ \beta_{23} = b_{14}$ etc.)

In beiden Korrelationen liegt jeder Punkt in seiner Polarebene, und jede Ebene geht durch ihren Pol. Suchen wir nun zu einem Punkte P die Polarebene π, die ihm *durch die Korrelation A* zugewiesen ist und konstruieren zur Ebene π den ihr *nach B* entsprechenden Pol P′, so haben wir eine *Kollineation* (P—P′) definiert. Es entsprechen sich also dann zwei Punkte P und P′ kollinear, wenn ihnen durch beide Korrelationen (A und B) dieselbe Ebene π als Polarebene zugewiesen ist. Den analytischen Ausdruck dieser kollinearen Beziehung erhalten wir, wenn wir in (7) $u_k = u'_k$ setzen und den Wert von u'_k aus Gleichung (7b) rechts in die Gleichung (7a) links einsetzen. Also:

$$\lambda x_i = \sum_{k,l=1}^{4} \beta_{kl}\, a_{ik}\, x'_l \tag{8a}$$

und analog folgt für die Koordinaten zweier entsprechender Ebenen:

$$\lambda u_i = \sum_{k,l=1}^{4} \alpha_{ik}\, b_{kl}\, u'_l \tag{8b}$$

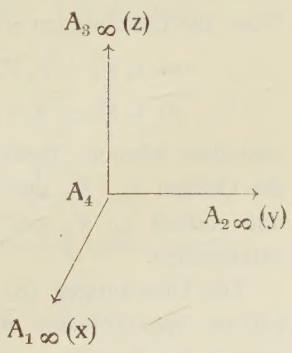
Setzen wir voraus, daß die Komplexe A und B konjugiert sind, so ist diese Kollineation eine involutorische d. h. jedem Element entspricht ein anderes in doppelter Weise. Analytisch läßt sich dies leicht dadurch zeigen, daß man in (8) a_{ik} mit b_{ik} bezw. α_{ik} mit β_{ik} vertauscht und

dabei die Bedingung (3) berücksichtigt. *Die Doppelstrahlen der involutorischen Kollineation* d. h. die Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Punkte (Schnittgeraden je zweier entsprechender Ebenen) *sind die den Komplexen A und B gemeinsamen Strahlen. Sie bilden also die durch A und B dargestellte lineare Strahlenkongruenz.*

Zu weit einfacheren Gleichungen gelangen wir aber, wie sich zeigen wird, wenn wir unseren Untersuchungen eine Kongruenz C_1^1 zu Grunde legen, die durch die folgenden beiden Komplexe definiert ist:

$$\alpha)\ \underline{p_{23} + \alpha p_{14} = 0}; \quad \beta)\ \underline{p_{13} + \beta p_{24} = 0}$$

wo α und β konstante Größen sind. Durch diese Spezialisierung der Komplexgleichungen haben wir nämlich folgendes erreicht: Wir können das Koordinatentetraëder, auf das sich die Größen p_{ik} beziehen, so annehmen, daß eine der Seiten (etwa $A_1 A_2 A_3$, wenn wir mit A_i die Eckpunkte bezeichnen) ins Unendliche rückt und die übrigen aufeinander senkrecht stehen. Die Kanten des Tetraëders, die nicht in der unendlich fernen Ebene liegen, bilden somit ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz $A_4 A_{1\infty}$; $A_4 A_{2\infty}$; $A_4 A_{3\infty}$, dessen Achsen wir der bequemen Ausdrucksweise halber als x-, y- und z-Achse bezeichnen. Dann zeigen die Gleichungen (7) sofort, daß dem Punkt A_4 durch den Komplex α) die Ebene $A_2 A_3 A_4$ ($x_1 = 0$) zugeordnet ist, während ihm im Komplex β) die Ebene $A_1 A_3 A_4$ ($x_2 = 0$) entspricht. Für die Koordinaten der Tetraëderkanten gilt bekanntlich:



	p_{23}	p_{31}	p_{12}	p_{14}	p_{24}	p_{34}
$A_2 A_3$	1	0	0	0	0	0
$A_1 A_3$	0	1	0	0	0	0
$A_1 A_2$	0	0	1	0	0	0
$A_1 A_4$	0	0	0	1	0	0
$A_2 A_4$	0	0	0	0	1	0
$A_3 A_4$	0	0	0	0	0	1

Die Kanten $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ sind in der Kongruenz C_1^1 enthalten, da ihre Koordinaten den Gleichungen α) und β) genügen. Dagegen folgt aus den Gleichungen (4), daß die Geraden $A_2 A_3$ und $A_1 A_4$ im Komplexe α), $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$ jedoch im Komplexe β) konjugiert sind. Die Koordinatenachsen sind ferner die drei Symmetrieachsen der Kongruenz. Denn die Gleichungen α) und β), die wir auch in der Form

$$\alpha) \quad x_2 x'_3 - x_3 x'_2 + \alpha (x_1 x'_4 - x_4 x'_1) = 0$$
$$\beta) \quad x_1 x'_3 - x_3 x'_1 + \beta (x_2 x'_4 - x_4 x'_2) = 0$$

schreiben können, bleiben bestehen, wenn wir einmal die die Größen x_3, x'_3 und x_1, x'_1, dann x_2, x'_2 und x_1, x'_1 und endlich x_2, x'_2 und x_3, x'_3 mit ihren negativen Werten vertauschen.

Die Gleichungen (8) für die durch die Kongruenz gegebene involutorische Kollineation gehen jetzt nach Annahme der Komplexe α) und β) über in:

$$(9) \qquad x_1 = x'_2; \ \beta x_2 = \alpha x'_1; \ x_3 = \alpha x_4; \ \beta x_4 = x'_3.$$
$$(10) \qquad \beta u_1 = \alpha u'_2; \ u_2 = u'_1; \ \beta u_3 = u'_4; \ u_4 = \alpha u'_3$$

wenn wir einen Proportionalitätsfaktor überall weglassen. Der unendlich fernen Ebene ($x_4 = 0$) ist, wie hieraus ersichtlich, die Ebene $x_3 = 0$, die „Fluchtebene“ der Kongruenz zugeordnet.

Um die Leitlinien von C_1^1 zu finden, betrachten wir den Komplexbüschel, der durch die Komplexe α) und β) definiert ist, und dessen gemeinsame Strahlen die Kongruenz C_1^1 bilden. Er ist dargestellt durch die Gleichung:

$$p_{23} + \alpha p_{14} + \lambda (p_{13} + \beta p_{24}) = 0.$$

In diesem Büschel sind zwei spezielle Komplexe enthalten, deren Parameter λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\lambda^2 = \frac{\alpha}{\beta}$ sind.[1]) Diese speziellen Komplexe haben folglich die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} p_{23} + \alpha p_{14} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (p_{13} + \beta p_{24}) = 0 \\ p_{23} + \alpha p_{14} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (p_{13} + \beta p_{24}) = 0 \end{cases}$$

und ihre Leitlinien sind die Leitlinien von C_1^1, deren Linienkoordinaten sich also unmittelbar aus (12) ergeben:

$$(13) \quad p_{13} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} =$$

$$\begin{cases} 0 : \alpha : + \sqrt{\alpha\beta} : 1 : - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} : 0 \\ 0 : \alpha : - \sqrt{\alpha\beta} : 1 : + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} : 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen der beiden Leitlinien lauten somit:

$$(14) \quad \begin{cases} x_3 = + \sqrt{\alpha\beta}; \; x_2 = + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_1 \\ x_3 = - \sqrt{\alpha\beta}; \; x_2 = - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_1; \end{cases}$$

Sie schneiden also die z-Achse rechtwinklig, und der Winkel ihrer orthogonalen Projektionen auf die xy-Ebene wird von den Koordinatenachsen (x und y) halbiert. Sie sind

[1]) Vergl. Clebsch-Lindemann. Vorlesungen über Geometrie II. 1. Seite 58.

$\left\{\begin{matrix}\text{reell}\\ \text{imaginär}\\ \text{zusammenfallend}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $\alpha \cdot \beta \gtreqless 0$ ist. Also

Die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem die Größen α und β verschiedenes oder gleiches Zeichen haben und parabolisch, wenn α oder β verschwindet.

II. Das Fokalparaboloid.

Um nun Fokaleigenschaften unserer Kongruenz C_1^1 zu finden, fragen wir zunächst nach denjenigen Regelflächen 2. Ordnung, deren eine Regelschar aus Strahlen der Kongruenz besteht. Eine Regelfläche 2. Ordnung ist allgemein definiert durch 3 windschiefe Geraden, die durch ihre Linienkoordinaten q_{ik}, r_{ik}, s_{ik} gegeben seien. Dann gehören sämtliche Punkte einer 4. Geraden (p_{ik}) der Fläche an, wenn diese die Geraden q, r, s gleichzeitig schneidet. Hierfür lauten die analytischen Bedingungen:

$$q_{34}p_{12} + q_{24}p_{31} + q_{14}p_{23} + q_{12}p_{34} + q_{31}p_{24} + q_{23}p_{14} = 0$$
$$r_{34}p_{12} + r_{24}p_{31} + r_{14}p_{23} + r_{12}p_{34} + r_{31}p_{24} + r_{23}p_{14} = 0$$
$$s_{34}p_{12} + s_{24}p_{31} + s_{14}p_{23} + s_{12}p_{34} + s_{31}p_{24} + s_{23}p_{14} = 0$$

Fügen wir hierzu die Identitäten, denen die Koordinaten x_i jedes der Geraden (p_{ik}) angehörigen Punktes genügen müssen:

$$x_2p_{34} - x_3p_{24} + x_4p_{23} = 0$$
$$x_3p_{14} - x_1p_{34} + x_4p_{31} = 0$$
$$x_1p_{24} - x_2p_{14} + x_4p_{12} = 0$$

so haben wir 6 unabhängige, homogene Gleichungen zwischen den 6 Größen p_{ik}. Eliminieren wir diese, so ist die gesuchte Regelfläche dargestellt durch eine Gleichung in laufenden Punktkoordinaten x_i, deren Koeffizienten sich

aus den Linienkoordinaten der gegeben 3 Geraden zusammensetzen. Das Eliminationsresultat ist die Determinante der 6 Gleichungen, die nach einem Satze der Determinantentheorie verschwinden muß:

$$\begin{vmatrix} q_{23} & q_{31} & q_{24} & q_{12} & q_{31} & q_{14} \\ r_{23} & r_{34} & r_{24} & r_{12} & r_{31} & r_{14} \\ s_{23} & s_{34} & s_{24} & s_{12} & s_{31} & s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_3 & 0 & x_4 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wir erhalten scheinbar eine Gleichung 3. Grades; doch läßt sich x_4, das ja nicht Null sein kann, als Faktor ausscheiden. Entwickeln wir die Determinante und setzen wir zur Abkürzung:

$$|\, q_{23}\, q_{34}\, q_{24} \,| \text{ etc. für } \begin{vmatrix} q_{23} & q_{34} & q_{24} \\ r_{23} & r_{34} & r_{24} \\ s_{23} & s_{34} & s_{24} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

so reduziert sich die Gleichung auf:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &|\, q_{23}\, q_{34}\, q_{24} \,| \cdot x_1^2 + |\, q_{34}\, q_{31}\, q_{14} \,| \cdot x_2^2 + \\ &+ |\, q_{12}\, q_{24}\, q_{14} \,| \cdot x_3^2 + |\, q_{23}\, q_{12}\, q_{31} \,| \cdot x_4^2 + \\ &+ \{ \underline{|\, q_{34}\, q_{23}\, q_{14} \,|} + \underline{|\, q_{34}\, q_{24}\, q_{31} \,|} \} \cdot x_1 x_2 + \\ &+ \{ \underline{|\, q_{23}\, q_{24}\, q_{14} \,|} + |\, q_{34}\, q_{24}\, q_{12} \,| \} \cdot x_1 x_3 + \\ &+ \{ |\, q_{31}\, q_{24}\, q_{14} \,| + |\, q_{34}\, q_{12}\, q_{14} \,| \} \cdot x_2 x_3 + \\ &+ \{ \underline{|\, q_{23}\, q_{24}\, q_{31} \,|} + |\, q_{23}\, q_{34}\, q_{12} \,| \} \cdot x_1 x_4 + \\ &+ \{ |\, q_{34}\, q_{12}\, q_{31} \,| + \underline{|\, q_{23}\, q_{31}\, q_{14} \,|} \} \cdot x_2 x_4 + \\ &+ \{ \underline{|\, q_{23}\, q_{12}\, q_{14} \,|} + \underline{|\, q_{12}\, q_{24}\, q_{31} \,|} \} \cdot x_3 x_4 = 0 \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun an, daß die hierdurch dargestellte geradlinige Fläche eine Regelschar enthalte, deren Strahlen der Kongruenz C_1^1 angehören, also z. B. diejenige Regelschar, die durch die Geraden q, r und s bestimmt ist, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{cases} q_{23} = -\alpha q_{14}; & q_{31} = \beta q_{24}; \\ r_{23} = -\alpha r_{14}; & r_{31} = \beta r_{24}; \\ s_{23} = -\alpha s_{14}; & s_{31} = \beta s_{24}; \end{cases}$$

Hierdurch wird aber:

$$|q_{24}\, q_{31}\, q_{14}| = \beta\, |q_{24}\, q_{24}\, q_{14}| = 0$$

da zwei Kolonnen der Determinante einander gleich werden. Ebenso verschwinden sämtliche unterstrichenen Determinanten in Gleichung (1). Ferner bestehen infolge (2) zwischen den übrig bleibenden Koeffizienten die Beziehungen:

$$|q_{23}\, q_{34}\, q_{24}| = -\frac{\alpha}{\beta}\,|q_{34}\, q_{31}\, q_{14}|;\quad |q_{34}\, q_{24}\, q_{12}| = -\frac{1}{\beta}\,|q_{34}\, q_{12}\, q_{31}|.$$

$$|q_{12}\, q_{24}\, q_{14}| = -\frac{1}{\alpha\beta}\,|q_{23}\, q_{12}\, q_{31}|;\quad |q_{23}\, q_{34}\, q_{12}| = -\alpha\,|q_{34}\, q_{12}\, q_{14}|.$$

Somit erhalten wir das Resultat:

Eine geradlinige Fläche II. Ordnung, deren eine Regelschar aus Strahlen der linearen Kongruenz C_1^1 besteht, ist dargestellt durch die Gleichung:

$$(3)\qquad \sum_{i,\,k=1}^{4} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

wo zwischen den Koeffizienten a_{ik} die Beziehungen gelten:

$$(4)\qquad \begin{cases} \beta a_{11} = -\alpha a_{22}; & \alpha\beta a_{33} = -a_{44}; & \beta a_{13} = -\alpha_{34}; \\ a_{14} = -\alpha a_{23}; & a_{12} = 0; & a_{34} = 0. \end{cases}$$

Verlangen wir nun außerdem, daß diese „in der Kongruenz C_1^1 enthaltene" Regelfläche eine Rotationsfläche, also ein einschaliges Rotationshyperboloid, sei, so haben wir zunächst zwei Fälle zu unterscheiden: da nämlich in Gleichung (3) $a_{12} = 0$ sein soll, so können für den Fall der Rotationsfläche a_{23} und a_{13} nicht beide von Null verschieden sein.[1]) Nehmen wir also:

1) $a_{23} = 0$, so gilt außerdem $a_{13}^2 = (a_{11} - a_{22})\,(a_{33} - a_{22})$

[1]) Siehe: Schur. Analytische Geometrie, II. Auflage, S. 221.

Infolge (4) ist dann auch $a_{14} = 0$, und wir erhalten für die Richtungscosinus der Rotationsachse unserer Fläche mit Rücksicht auf (4) die Werte:

$$f : g : h = (a_{11} - a_{22}) : 0 : a_{13} = (\alpha + \beta) : 0 : \frac{a_{24}}{a_{22}}$$

Ferner ergibt sich für die Koordinaten des Flächenmittelpunktes:

$$x_1^0 = 0; \quad x_2^0 = -\frac{a_{24}}{a_{22}}; \quad x_3^0 = 0; \quad x_4^0 = 1;$$

Ist 2) $a_{13} = 0$, so folgt aus (4) $a_{24} = 0$ und außerdem gilt:

$$a_{23}^2 = (a_{22} - a_{11})(a_{33} - a_{11}).$$

In diesem Fall lauten die Richtungscos. der Rotationsachse:

$$f : g : h = 0 : (a_{22} - a_{11}) : a_{23} = 0 : (\alpha + \beta) : \frac{a_{14}}{a_{11}};$$

und die Koordinaten des Flächenmittelpunktes sind:

$$x_1^0 = -\frac{a_{14}}{a_{11}}; \quad x_2^0 = 0; \quad x_3^0 = 0; \quad x_4^0 = 1;$$

der Mittelpunkt unserer Rotationsfläche liegt also entweder auf der x- oder auf der y-Achse, und die Rotationsachse steht senkrecht auf der betreffenden Koordinatenachse. Wir haben somit gefunden:

Es gibt zwei Scharen von Rotationsflächen, deren eine Regelschar in der linearen Kongruenz C_1^1 *enthalten ist. Die Rotationsachsen der ersten Schar schneiden die x-Achse, die der zweiten Schar die y-Achse senkrecht. Die Gleichungen der Rotationsachsen sind.*

$$(5) \quad \begin{cases} 1) \ \underline{x_1 = -\varrho;} \ f : g : h \quad 0 : (\alpha + \beta) : \varrho; \text{ oder } \underline{\frac{x_2}{x_3} = \frac{\alpha + \beta}{\varrho};} \\ 2) \ \underline{x_2 = -\sigma;} \ f : g : h = (\alpha + \beta) : 0 : \sigma; \text{ oder } \underline{\frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha + \beta}{\sigma};} \end{cases}$$

Eliminieren wir jetzt hieraus den Parameter ϱ oder σ, so erhalten wir als geometrischen Ort dieser Rotationsachsen eine Fläche 2. Grades:

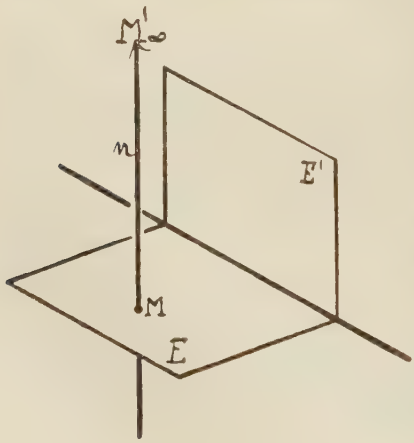
(6) $$x_1 \cdot x_2 = -(\alpha + \beta)\, x_3 \cdot x_4$$

und zwar ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, das die x- und y-Achse als Leitlinien hat. Wir nennen es nach Jolles das *„Fokalparaboloid"*, seine Regelstrahlen die *„Fokalregelstrahlen"* der linearen Kongruenz und erhalten somit den Satz:

Die Regelstrahlen des Fokalparaboloids und nur diese sind die Rotationsachsen von Rotationsflächen 2. Grades, von denen je eine Regelschar in der Kongruenz C_1^1 enthalten ist.

Bevor wir aber auf die Betrachtung dieser in der Kongruenz enthaltenen Rotationsflächen näher eingehen, wollen wir die Gleichung des Fokalparaboloids auf eine andere Weise herleiten, die uns zu weiteren interessanten Fokaleigenschaften führen wird.

Jeder Strahl der linearen Kongruenz C_1^1 ist Träger einer Punkt- und einer Ebeneninvolution des durch C_1^1 bestimmten geschart involutorischen Raumes. Letztere enthält im allgemeinen zwei konjugierte Ebenen E und E′, die aufeinander senkrecht stehen und nach Jolles *„Mittelebenen"* heißen. Jede dieser Mittelebenen schneidet den auf ihr senkrechten Kongruenzstrahl n in dem Mittelpunkt M seiner Punktinvolution, d. h. demjenigen Punkt, dem der unendlich ferne Punkt M′ des Strahles n zugeordnet ist. Denn n ist parallel E′, und sein unendlich ferner Schnittpunkt mit E′ ist der zu M konjugierte Punkt M′. Die Mittelpunkte sämt-



licher Kongruenzstrahlen liegen in der der unendlich fernen Ebene zugeordneten Ebene ($x_3 = 0$), also in der Fluchtebene der linearen Kongruenz. Suchen wir nun den geometrischen Ort aller Mittelebenen von C_1^1 zu bestimmen, so haben wir die Koordinaten u_i und u_i' von E und E′ zunächst den Gleichungen (10) S. 10, dann aber, da E senkrecht auf E′ steht, auch der Orthogonalitätsbedingung

$$u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' = 0$$

zu unterwerfen. Letztere geht aber mit Hilfe von (10) S. 10 über in:

(7) $$(\alpha + \beta)\, u_1 u_2 + u_3 u_4 = 0$$

Es genügen somit die Koordinaten der Mittelebenen einer Gleichung 2. Grades; wir erhalten also eine Fläche 2. Klasse, die von den Mittelebenen der Kongruenz eingehüllt wird. Ersetzen wir in (7) die Ebenenkoordinaten durch Punktkoordinaten, so zeigt sich, daß diese Fläche identisch ist mit dem S. 16 gefundenen Fokalparaboloid. Wir erhalten nämlich die Gleichung:

(6) $$x_1 x_2 + (\alpha + \beta)\, x_3 x_4 = 0$$

Somit gilt der Satz:

Das Fokalparaboloid wird von den Mittelebenen der Kongruenz (d. h. von den Mittelebenen ihrer ∞^2 Strahlen) eingehüllt. Seine Scheitelebene ist der Ort der Mittelpunkte der Kongruenzstrahlen.

Umgekehrt gilt:

Jede Ebene durch einen Fokalregelstrahl ist eine Mittelebene der linearen Kongruenz, d. h. sie steht auf der ihr zugeordneten Ebene senkrecht.

Denn legen wir z. B. durch den Fokalregelstrahl (s. S. 15):

(7) $$x_1 = -\varrho;\ \varrho x_2 = (\alpha + \beta)\, x_3$$

eine beliebige Ebene, so lautet deren Gleichung:

(8) $$x_1 - \mu\varrho x_2 + \mu(\alpha + \beta)\, x_3 + \varrho x_4 = 0$$

Wir erhalten dann für die ihr konjugierte Ebene nach Gleichung (10) S. 10:

$$(9) \qquad -\mu\varrho x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 + \frac{\varrho}{\alpha} x_3 + \mu\beta(\alpha+\beta) x_4 = 0$$

und sehen hieraus, daß die Orthogonalitätsbedingung: $u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' = 0$ für die beiden Ebenen erfüllt ist, daß sie also in der Tat Mittelebenen sind.

Als Tangentialebene des Fokalparaboloids enthält jede Mittelebene von beiden Fokalregelscharen je einen Strahl. Ordnen wir nun diejenigen beiden Strahlen, die von je zwei konjugierten Mittelebenen aus *derselben* Fokalregelschar ausgeschnitten werden, einander als entsprechend zu, so erhalten wir eine involutorische Paarung in jeder der Fokalregelscharen und nennen diese beiden Involutionen nach Jolles die *„Fokalinvolutionen"* der linearen Kongruenz. Da alle Fokalregelstrahlen die x- bezw. y-Achse senkrecht schneiden, so finden wir den analytischen Ausdruck dieser Involution, wenn wir die Schnittpunkte zweier konjugierter Mittelebenen mit der x- bezw. y-Achse aufsuchen. Aus den vorhergehenden beiden Gleichungen folgen für diese Punkte sofort die Koordinaten:

$$x_1 = -\varrho;\ x_1' = \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\varrho};$$

$$\text{bezw.: } x_2 = -\sigma;\ x_2' = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\sigma}$$

Durch Elimination des Parameter ϱ bezw. σ erhält man hieraus für die beiden Fokalinvolutionen:

$$(10) \qquad \underline{x_1 \cdot x_1' = -\beta(\alpha+\beta);} \qquad \underline{x_2 \cdot x_2' = -\alpha(\alpha+\beta);}$$

dem unendlich fernen Strahl der einen Schar entspricht also die x-Achse, während in der anderen Schar dem unendlich fernen Strahl die y-Achse zugeordnet ist. Die (reellen oder imaginären) Doppelstrahlen der Fokalinvolutionen heißen die *„Fokalachsen"* der Kongruenz. Für sie

gilt also $x_1 = x_1'$ bezw. $x_2 = x_2'$. Sie haben folglich die Parameter:

(11) $\varrho = \pm \sqrt{-\beta(\alpha+\beta)}$; bezw. $\sigma = \pm \sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}$

und ihre Gleichungen sind:

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = \mp \varrho\,; & \dfrac{x_2}{x_3} = \pm \dfrac{\alpha+\beta}{\varrho}\,; \\ \text{bezw. } x_2 = \mp \sigma\,; & \dfrac{x_1}{x_3} = \pm \dfrac{\alpha+\beta}{\sigma}\,; \end{cases}$$

Hieraus lassen sich ihre Linienkoordinaten berechnen. Es wird:

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} =$$

$$\begin{cases} 0 : (\alpha+\beta) : \pm\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)} : 0 : 1 : \pm\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}} \\ \pm\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)} : 0 : (\alpha+\beta) : \pm\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{-\alpha}} : 0 : 1 \end{cases}$$

Zwei zugeordnete Ebenen, von denen die eine durch eine Fokalachse geht, schneiden sich nach dem vorhergehenden orthogonal in dieser Fokalachse. In der Tat ist für zwei solche Ebenen:

$$x_1 - \mu\bar{\varrho}\,x_2 - (\alpha+\beta)\,\mu x_3 - \bar{\varrho}\,x_4 = 0 \text{ und}$$

$$\alpha(\alpha+\beta)\,\mu x_1 + \bar{\varrho}\,x_2 + \frac{1}{\alpha+\beta}\,x_3 - \frac{\bar{\varrho}}{\alpha(\alpha+\beta)\,\mu}\,x_4 = 0$$

wie sich sofort verifizieren läßt, die Orthogonalitätsbedingung erfüllt. Somit ist bewiesen:

Eine lineare Strahlenkongruenz enthält zwei Paare (reeller oder imaginärer) Fokalachsen. Deren Ebeneninvolutionen sind zirkular.

Es erübrigt noch, zu entscheiden, wann die Fokalachsen reell, wann imaginär sind. Wir hatten gefunden, daß die Kongruenz C_1^1 elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem α und β verschiedenes oder gleiches Zeichen haben. Die Gleichungen (11) und (12) liefern uns dann folgendes Schema:

Kongruenz C_1^1	Fokalinvolutionen 1. Schar	2. Schar	Fokalachsen	α und β	
hyperbolisch	elliptisch	elliptisch	2 Paar konjug. imaginäre	gleiches	Zeichen
elliptisch	hyperbolisch	elliptisch	1 Paar reell, 1 Paar imaginär	verschiedenes	Zeichen

das heißt:

Im Falle der hyperbolischen Kongruenz sind die Fokalinvolutionen beide elliptisch, die Fokalachsen also sämtlich imaginär, im Falle der elliptischen Kongruenz ist jedoch die eine Fokalregelschar hyperbolisch involutorisch gepaart, sie enthält also 2 reelle Fokalachsen, während die Involution der andern elliptisch ist, also keine reellen Doppelelemente enthält.

Kehren wir zurück zu der S. 16 abgebrochenen Untersuchung, so haben wir uns zunächst die Gleichungen der in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen Rotationsflächen wieder zu vergegenwärtigen. Wir hatten 2 Scharen von Rotationsflächen, also 2 Arten von Gleichungen 2. Grades gefunden, deren Koeffizienten folgenden Bedingungen genügen:

1) $\beta a_{11} = -\alpha a_{22}$; $\alpha\beta a_{33} = -a_{44}$; $\beta a_{13} = -a_{24}$; $a_{12} = 0$; $a_{34} = 0$; $a_{23} = 0$; $a_{14} = 0$; $a_{13}^2 = (a_{11} - a_{22})(a_{33} - a_{22})$

2) $\beta a_{11} = -\alpha a_{22}$; $\alpha\beta a_{33} = -a_{44}$; $a_{14} = -\alpha a_{23}$; $a_{12} = 0$; $a_{34} = 0$; $a_{13} = 0$; $a_{24} = 0$; $a_{23}^2 = (a_{22} - a_{11})(a_{33} - a_{11})$

Wollen wir nun die Frage beantworten, wann diese Flächen reell, wann imaginär sind, so können wir den Satz anwenden:

„Die durch die Gleichung $\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0$ dargestellte Fläche 2. Ordnung enthält dann und nur dann keine reellen Punkte, wenn 1) die Determinante $|a_{ik}|$ und alle Unterdeterminanten 2. Ordnung $a_{ii} a_{kk} - a_{ik}^2$ positiv sind und

2) die Diagonalglieder a_{ii} und ihre Unterdeterminanten A_{ii} gleiches Zeichen haben."

Wir behandeln zunächst die 1. Schar der Rotationsflächen, für die die Bedingungen 1) gelten. Mit Hülfe dieser Bedingungen läßt sich die Determinante der a_{ik} folgendermaßen darstellen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \beta^2 (a_{11} a_{33} - a_{13}^2)^2 > 0$$

Sie ist positiv, da es sich um geradlinige Flächen handelt. Bei der Untersuchung der Unterdeterminanten 2. Ordnung $a_{ii} a_{kk} - a_{ik}^2$ unterscheiden wir die beiden Fälle der hyperbolischen und elliptischen Kongruenz:

I. Ist C_1^1 hyperbolisch, also $\alpha \cdot \beta > 0$ so sind diese Unterdeterminanten nicht alle positiv z. B.

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

was infolge der Bedingungen 1) S. 20 übergeht in $-\frac{\alpha}{\beta} a_{22}^2$, also sicherlich negativ ist. Unsere Rotationsflächen der 1. Schar sind also im Fall der hyperbolischen Kongruenz stets reell.

II. Ist C_1^1 elliptisch, so ist die eine Fokalregelschar hyperbolisch, die andern elliptisch involutorisch gepaart. Wir unterscheiden demgemäß zwei Unterfälle:

a) Die Fokalregelstrahlen, die die Rotationsachsen unserer 1. Flächenschar ausmachen (es sind dies diejenigen, die die y-Achse orthogonal schneiden) seien elliptisch involutorisch gepaart. Es ist dann (vergl. S. 18)

$$-\alpha(\alpha+\beta) < 0; \quad -\beta(\alpha+\beta) > 0$$

und wir erhalten für die fraglichen Unterdeterminanten:

$$a_{11}a_{22} = -\frac{\alpha}{\beta}a_{22}^2 > 0;\ a_{22}a_{33} = -\frac{\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2}a_{13}^2 + a_{22}^2 < 0;$$

$$a_{33}a_{44} = -\alpha\beta a_{33}^2 > 0;\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 > 0, \text{ da}$$

$$a_{11}a_{33} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}a_{13}^2 = -\frac{\alpha}{\beta}a_{22}^2 \text{ ist; also gilt } \left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha}a_{11}a_{33}\right| - a_{13}^2 > 0$$

und a fortiori die vorhergehende Ungleichung.

$$a_{11}a_{44} = -\alpha\beta a_{11}a_{33} > 0;$$
$$a_{22}a_{44} - a_{24}^2 = \beta^2(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) > 0.$$

Ferner haben folgende Ausdrücke gleiches Zeichen:

$$a_{11} \text{ und } a_{22}a_{33}a_{44} - a_{33}a_{24}^2 = a_{33}(a_{22}a_{44} - a_{24}^2)$$

$$\text{da } a_{22}a_{44} - a_{24}^2 > 0 \text{ und } a_{11}a_{33} > 0 \text{ ist}$$

a_{22} und $a_{11}a_{33}a_{44} - a_{44}a_{13}^2 = a_{44}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)$ mit analoger Begründung.

$$a_{33} \text{ und } a_{11}(a_{22}a_{44} - a_{24}^2)$$
$$a_{44} \text{ und } a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)$$

Im Falle II. a) sind also sämtliche Flächen imaginär.

b) Nehmen wir aber an, die die y-Achse schneidende Fokalregelschar sei hyperbolisch involutorisch gepaart, es sei also:

$$\alpha(\alpha+\beta) < 0;\ \beta(\alpha+\beta) > 0$$

so sind zwar die Unterdeterminanten

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{\beta}{\alpha}a_{22}^2 \text{ und } a_{33}a_{44} - a_{34}^2 = -\alpha\beta a_{11}^2$$

stets positiv, jedoch können die Größen

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \text{ und } a_{22}a_{44} - a_{24}^2$$

auch negative Werte annehmen. Beide Ausdrücke gehen nämlich mit Hülfe der Bedingungen 1) S. 20 über in

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = -\frac{1}{\beta(\alpha+\beta)}(a_{24}^2 + \alpha(\alpha+\beta)a_{22}^2)$$

und dieser Ausdruck ist $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $a_{24}^2 + \alpha(\alpha+\beta)\, a_{22}^2 \lessgtr 0$ ist. Unsere Flächen sind also $\left\{\begin{matrix}\text{imaginär}\\ \text{reell}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $\frac{a_{24}^2}{a_{22}^2} \lessgtr -\alpha(\alpha+\beta)$ oder:

$$\frac{a_{24}}{a_{22}} \lessgtr \pm \sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}.$$

Auf der linken Seite dieser Ungleichung steht aber gerade der Wert für die y-Koordinate des Flächenmittelpunktes (s. S. 15), während die Wurzel rechts die Entfernungen vom Koordinatenanfangspunkt angibt, in denen die beiden Fokalachsen die y-Achse treffen. (s. S. 18). Unsere Rotationsflächen sind also reell, wenn die Rotationsachse die y-Achse außerhalb, und imaginär, wenn sie die y-Achse innerhalb der Fokalachsen schneidet, vorausgesetzt, daß die noch übrig bleibenden Forderungen des Satzes (S. 20) ebenso erfüllt werden können. Diese führen aber in der Tat zu demselben Resultat. Es wird nämlich verlangt, daß:

$$a_{11}\, a_{44} > 0;\ a_{22}\, a_{33} > 0;$$

wenn die Fläche imaginär werden soll. Dies ist aber a fortiori der Fall, sobald

$$a_{11}\, a_{33} - a_{31}^2 > 0 \text{ bezw. } a_{22}\, a_{44} - a_{24}^2 > 0.$$

Ebenso führen die übrigen Bedingungen, daß nämlich folgende Größen gleiches Zeichen haben:

$$\begin{matrix} a_{11} & \text{und} & a_{33}(a_{22}\, a_{44} - a_{24}^2) \\ a_{22} & \text{und} & a_{44}(a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2) \\ a_{33} & \text{und} & a_{11}(a_{22}\, a_{44} - a_{24}^2) \\ a_{44} & \text{und} & a_{22}(a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2) \end{matrix}$$

zu derselben, oben aufgestellten Ungleichung.

Nehmen wir die nämlichen Untersuchungen, die wir mit der 1. Schar der Rotationsflächen ausgeführt haben, auch mit der 2. Schar vor, so haben wir nur anstatt der Be-

dingungen 1. S. 20 die Bedingungen 2. anzuwenden, und wir erhalten auf diese Weise ganz entsprechende Resultate.

Wir können also zusammenfassend den Satz aussprechen:

Jede im Endlichen gelegene Erzeugende des Fokalparaboloids einer hyperbolischen, linearen Strahlenkongruenz ist die Rotationsachse einer reellen Rotationsfläche 2. Grades, deren eine Regelschar in der Kongruenz enthalten ist. Bei einer elliptischen Kongruenz werden diejenigen Rotationsflächen, deren Rotationsachsen zur elliptisch involutorischen Fokalregelschar gehören, imaginär, während diejenigen, deren Rotationsachsen die hyperbolisch involutorische Fokalregelschar bilden, in reelle und imaginäre zerfallen. Sie sind reell, wenn ihre Rotationsachsen außerhalb der Fokalachsen die betreffende Leitlinie des Paraboloids schneiden, imaginär, wenn sie innerhalb der Fokalachsen die Leitlinie schneiden.

III. Die mit einer Fokalregelschar verbundenen Regelflächen 2. Grades.

Zwei weitere Scharen von Flächen 2. Grades, deren Erzeugung aufs engste mit der Theorie des Fokalparaboloids zusammenhängt, erhalten wir durch folgende Betrachtung: Je 2 einander zugeordnete Strahlen einer Fokalregelschar sind die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel, deren Ebenen durch C_1^1 einander zugeordnet sind und sich in je einem Kongruenzstrahl senkrecht schneiden. Die beiden Büschel erzeugen also eine orthogonale Regelfläche 2. Grades, deren eine Regelschar im C_1^1 enthalten ist; sie heißt nach Jolles mit der betr. Regelschar des Fokalparaboloids *„verbunden"*.

Wollen wir ihre Gleichung finden, so denken wir uns 2 zugeordnete Fokalregelstrahlen gegeben, die nach S. 15 dargestellt sind durch die Gleichungen:

$$1)\ x_1 - \varrho = 0;\ \varrho x_2 + (\alpha + \beta) x_3 = 0$$

$$2)\ x_1 + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\varrho} = 0;\ -\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\varrho} x_2 + (\alpha+\beta) x_3 = 0;$$

Ist dann

$$(1) \qquad x_1 - \mu\varrho x_2 - (\alpha+\beta)\mu x_3 - \varrho x_4 = 0$$

die Gleichung einer Ebene, die durch den Strahl 1) geht, so erhalten wir für die konjugierte Ebene, die den Strahl 2) enthält:

$$(2)\ x_1 + \mu'\beta\frac{\alpha+\beta}{\varrho} x_2 - \mu'(\alpha+\beta) x_3 + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\varrho} x_4 = 0.$$

Mit Hilfe der Bedingungen (10) S. 10 ergibt sich für den Parameter μ':

$$\mu' = -\frac{1}{\mu(\alpha+\beta)\cdot\alpha};$$

Eliminieren wir jetzt aus (1) und (2) die Größe μ, so kommt als Gleichung der gesuchten orthogonalen Regelfläche:

$$\alpha\varrho x_1^2 - \beta\varrho x_2^2 + (\alpha+\beta)\varrho x_3^2 - \alpha\beta(\alpha+\beta)\varrho x_4^2 +$$
$$+ (\alpha\beta(\alpha+\beta) - \alpha\varrho^2) x_1 x_4 + (\varrho^2 - \beta(\alpha+\beta)) x_2 x_3 = 0$$

oder:

$$(3)\quad \varrho[\alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + (\alpha+\beta) x_3^2 - \alpha\beta(\alpha+\beta) x_4^2] +$$
$$+ (\varrho^2 - \beta(\alpha+\beta))(x_2 x_3 - \alpha x_1 x_4) = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(4) \qquad 2\lambda = \frac{\varrho^2 - \beta(\alpha+\beta)}{\varrho}$$

so geht die Gleichung (3) über in:

$$(5)\quad \underline{\alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + (\alpha+\beta) x_3^2 - \alpha\beta(\alpha+\beta) x_4^2 +}$$
$$\underline{+ 2\lambda(x_2 x_3 - \alpha x_1 x_4) = 0}$$

Hieraus können wir schließen:

Sämtliche mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen bilden ein F^2-Büschel.

Ganz analog erhalten wir die Gleichung des mit der anderen Fokalregelschar verbundenen F^2-Büschels:

(6) $$\underline{\alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - (\alpha + \beta)\, x_3^2 + \alpha\beta\,(\alpha + \beta)\, x_4^2 + 2\mu\,(x_1 x_3 - \beta x_2 x_4) = 0.}$$

(7) Hier ist $2\mu = \dfrac{\alpha(\alpha + \beta) - \sigma^2}{\sigma}$ gesetzt, wobei σ aus (5) S. 15 entnommen wurde.

Bei der Ableitung der Gleichungen (5) und (6) gingen wir aus von 2 beliebigen Fokalregelstrahlen, die durch den Parameter ϱ bezw. σ gekennzeichnet waren, und bildeten durch die Beziehungen (4) bezw. (7) die Größen λ bezw. μ. Diesen können wir beliebige Werte beilegen und erhalten dadurch die ∞ Flächen der Büschel (5) und (6). Fragen wir uns, ob zu jedem Wert von λ bezw. μ auch eine *reelle* Fläche des betr. Büschels gehört, so müssen wir versuchen, von der gegebenen Flächengleichung ((5) bezw. (6)) wieder zu der obigen Erzeugung durch projektive Ebenenbüschel, die ja nur reelle Flächen liefern kann, zu gelangen. Und zwar finden wir die Achsen der Ebenenbüschel, wenn wir bei gegebenen λ bezw. μ aus den Gleichungen (4) bezw. (7) reelle Werte für die Parameter ϱ bezw. σ erhalten. Gleichung (4) lautet etwas verändert:

$$\varrho^2 - 2\lambda\varrho - \beta(\alpha + \beta) = 0$$

Sie ist quadratisch in ϱ und liefert daher $\left\{\begin{matrix}\text{reelle}\\ \text{imaginäre}\end{matrix}\right\}$ Werte für ϱ, je nachdem die Diskriminante

$$D_1 = \lambda^2 + \beta(\alpha + \beta) \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Analog folgt aus (7) daß $\sigma \left\{\begin{matrix}\text{reell}\\ \text{imaginär}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem

$$D_2 = \mu^2 + \alpha(\alpha + \beta) \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Ist $\alpha\beta > 0$, d. h. haben wir es mit einer hyperbolischen Kongruenz zu tun, so sind D_1 und D_2 beide positiv, die Wurzeln der quadratischen Gleichungen (4) und (7) also stets reell. Im Falle der elliptischen Kongruenz ($\alpha\beta < 0$) haben wir zu bedenken, daß die Größen $\alpha(\alpha + \beta)$ und

$\beta(\alpha+\beta)$ stets verschiedenes Zeichen haben. Nehmen wir also z. B. $\alpha(\alpha+\beta)>0$; dagegen $\beta(\alpha+\beta)<0$, so ist ϱ reell, während σ reelle oder imaginäre Werte annimmt, je nachdem

$$\mu^2 > \text{oder} < |\,\beta(\alpha+\beta)\,| \text{ ist.}$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Überlegungen von S. 18:

Im Falle der hyperbolischen Kongruenz sind die mit den Fokalregelscharen verbundenen Flächen stets reell. Ist die Kongruenz elliptisch, so kann der mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Büschel, und nur dieser, imaginäre Flächen enthalten. Seine Flächen sind nämlich reell, wenn

$$\lambda^2 > |\,\beta(\alpha+\beta)\,| \text{ bezw. } \mu^2 > |\,\alpha(\alpha+\beta)\,|$$

imaginär, wenn

$$\lambda^2 < |\,\beta(\alpha+\beta)\,| \text{ bezw. } \mu^2 < |\,\alpha(\alpha+\beta)\,| \text{ ist.}$$

Die Flächen jedes der beiden Büschel degenerieren zweimal in einen Strahl, nämlich in die (reellen oder imaginären) Fokalachsen der Fokalregelschar, mit der der betr. Büschel verbunden ist. Die der ersten Fokalregelschar angehörigen Fokalachsen sind in allen Flächen des mit der anderen Regelschar verbundenen Büschels enthalten, sie bilden also einen Teil der Grundkurve dieses Büschels. Außerdem gehen sämtliche Flächen beider Büschel durch die Leitlinien der Kongruenz, da eine ihrer Regelscharen aus Kongruenzstrahlen besteht. Die Grundkurve jedes mit einer Fokalregelschar verbundenen F^2 Büschels zerfällt also in die (reellen oder imaginären) Leitlinien der Kongruenz und in die der anderen Fokalregelschar angehörigen (reellen oder imaginären) Fokalachsen. Die nicht in C_1^1 enthaltenen Regelstrahlen aller Flächen des Büschels schneiden also die beiden Fokalachsen, die zur Grundkurve dieses Büschels gehören, und bilden somit eine lineare Kongrueuz F_1^1, die

wir mit der betreffenden Fokalregelschar „verbunden" nennen können. Analog entsteht eine zweite lineare Kongruenz $\mathfrak{F}_1^1$, die mit der anderen Fokalregelschar verbunden ist, und beide sollen nach Jolles die *„Fokalkongruenzen"* von C_1^1 genannt werden. Die Leitlinien einer mit einer Fokalregelschar verbundenen Fokalkongruenz sind die beiden Fokalachsen, die zur anderen Fokalregelschar gehören. Je nachdem diese reell oder imaginär sind, ist die betr. Fokalkongruenz hyperbolisch oder elliptisch, also:

Kongruenz	Fokalinvolutionen		F_1^1 mit der 1. Regelschar verbunden	$\mathfrak{F}_1^1$ mit der 2. Regelschar verbunden
	1. Fokalregelschar	2. Fokalregelschar		
hyperbolisch	elliptisch	elliptisch	elliptisch	elliptisch
elliptisch	hyperbolisch	elliptisch	elliptisch	hyperbolisch

Mit jeder der beiden Fokalregelscharen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist eine lineare Strahlenkongruenz F_1^1 bezw. $\mathfrak{F}_1^1$ verbunden. F_1^1 und $\mathfrak{F}_1^1$ heißen die Fokalkongruenzen von C_1^1. Ist C_1^1 hyperbolisch, so sind beide Fokalkongruenzen elliptisch; ist C_1^1 elliptisch, so ist die mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Fokalkongruenz elliptisch, die mit der elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbundene hyperbolisch.

Um die Fokalkongruenzen analytisch darzustellen, gehen wir aus von den S. 19 gefundenen Linienkoordinaten der Fokalachsen:

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} =$$

$$\begin{cases} 0 : \beta(\alpha+\beta) : \pm(\alpha+\beta)\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)} : 0 : (\alpha+\beta) : \pm\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)} \\ -\alpha(\alpha+\beta) : 0 : \pm(\alpha+\beta)\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)} : (\alpha+\beta) : 0 : \mp\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

und stellen die Gleichungen der 4 speziellen Komplexe auf, die die Fokalachsen als Leitlinien haben. Sie lauten:

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta)\,p_{31}+\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)}\,p_{12}+(\alpha+\beta)\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)}\,p_{34}\\ \qquad+\beta(\alpha+\beta)\,p_{24}=0\\ (\alpha+\beta)\,p_{31}-\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)}\,p_{12}+(\alpha-\beta)\sqrt{-\beta(\alpha+\beta)}\,p_{34}\\ \qquad+\beta(\alpha+\beta)\,p_{24}=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta)\,p_{23}-\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}\,p_{12}+(\alpha+\beta)\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}\,p_{34}\\ \qquad-\alpha(\alpha+\beta)\,p_{24}=0\\ (\alpha+\beta)\,p_{23}+\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}\,p_{12}-(\alpha+\beta)\sqrt{-\alpha(\alpha+\beta)}\,p_{34}\\ \qquad-\alpha(\alpha+\beta)\,p_{24}=0\end{array}\right.$$

Durch je zwei dieser Komplexe ist dann eine der beiden Fokalkongruenzen dargestellt.

IV. Polarsysteme 1. und 2. Art einer linearen Strahlenkongruenz.[1])

Um über die Polareigenschaften des Fokalparaboloids und der mit jeder Fokalregelschar verbundenen Regelflächen (Kap. III) Aufschluß zu erhalten, wenden wir uns in diesem Kapitel der Betrachtung von Flächen 2. Grades zu, durch deren polare Zuordnung die lineare Kongruenz C_1^1 in sich übergeht, d. h. wir verlangen, daß jedem Kongruenzstrahl als reziproke Polare inbezug auf eine solche Fläche wieder ein Kongruenzstrahl zugewiesen ist. Zu dem Ende beweisen wir zunächst einen Satz, der uns die Grundlage zu einer einfachen, analytischen Anordnung geben wird. Wir behaupten nämlich:

Wenn die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 durch das Polarsystem einer Fläche 2. Grades F^2 in sich über-

[1]) Vergl. S. 6 Anm. [1]) und auch: Kippels, Involutorische Regelscharen etc. Inaugural-Diss. Straßburg 1904.

geführt wird, so ist diese Fläche gegenüber der durch C_1^1 definierten involutorischen Kollination invariant, d. h. einem Punkt von F^2 ist durch C_1^1 wieder ein Flächenpunkt zugeordnet.

Zum Beweis schreiben wir $P = \mathfrak{F}\pi$ und $s' = \mathfrak{F}s$, wenn π die Polarebene des Punktes P bezw. s' die reziproke Polare von s inbezug auf F^2 ist; ferner sei $P = \mathfrak{C}P'$, wenn P' dem Punkte P in der durch C_1^1 definierten Kollineation entspricht. Nun ist diese involutorische Kollineation $\mathfrak{C}$ unter allen involutorischen Kollineationen, die C_1^1 in sich verwandeln, dadurch ausgezeichnet, daß sie *jeden Strahl von C_1^1 in sich überführt* (s. S. 9). Wird aber die Kongruenz C_1^1 durch die Polarität $\mathfrak{F}$ in sich verwandelt, so ist auch die Transformation $\mathfrak{F}\mathfrak{C}\mathfrak{F}$ eine solche ausgezeichnete Kollineation. Denn es gilt, weil $s' = \mathfrak{F}s$ wieder ein Kongruenzstrahl ist, die Identität:

(1) $$\mathfrak{C}\mathfrak{F}s = \mathfrak{F}s.$$

Also: $$\mathfrak{F}\mathfrak{C}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}s = s$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{C}\mathfrak{F} = \mathfrak{C} \text{ oder } \mathfrak{F}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{F}.$$

Sind nunmehr P und P' die Pole zweier durch C_1^1 einander zugeordneter Ebenen π und π', also in unserer Schreibweise:

(2) (3) (4) $$P = \mathfrak{F}\pi; \quad P' = \mathfrak{F}\pi'; \quad \pi' = \mathfrak{C}\pi$$

so ist auch:

$$P' = \mathfrak{F}\pi' = \mathfrak{F}\mathfrak{C}\pi = \mathfrak{C}\mathfrak{F}\pi = \mathfrak{C}P \text{ oder:}$$

(5) $$P' = \mathfrak{C}P$$

d. h. also: *Einem Pol und seiner Polarebene für F^2 ordnet die Kollineation $\mathfrak{C}$ wieder einen Pol und seine Polarebene für F^2 zu.* Hieraus folgt nun sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung. Wenn nämlich der Punkt P auf der Fläche F liegt, so ist $\pi = \mathfrak{F}P$ Tangential-

ebene in ihm. Dasselbe muß aber auch für die entsprechenden Elemente $P' = \mathfrak{C}P$ und $\pi' = \mathfrak{C}\pi$ gelten, da die Ebene π' den Punkt P' enthält und außerdem nach dem Vorhergehenden P' und π' Pol und Polare inbezug auf F^2 sind.

Ganz ebenso läßt sich die Umkehrung unseres Satzes beweisen:

Wenn eine Fläche 2. Grades F^2 gegenüber der Zuordnung der linearen Kongruenz C_1^1 invariant ist, so geht C_1^1 in dem durch F^2 definierten Polarsystem in sich über.

Nun können wir unsere ursprüngliche Aufgabe auch etwas anders behandeln. Anstatt nämlich Flächen aufzusuchen, für deren Polarsysteme die Kongruenz invariant ist, können wir jetzt unserm Satze (S 29/30) gemäß nach denjenigen Flächen fragen, die durch die involutorische Kollionation von C_1^1 in sich übergehen.

Um diese letztere Forderung analytisch auszudrücken, setzen wir in der allgemeinen Gleichung der Fläche 2. Grades

$$(6) \qquad \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik} x_i x_k = 0$$

für den Flächenpunkt x den ihm durch C_1^1 d. h. durch die Gleichungen (9) S. 10 zugeordneten Punkt x′ ein, dessen Koordinaten dann ebenfalls die Gleichung (6) befriedigen müssen. Es wird also:

$$(7) \qquad \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik} x_i' x_k' = 0$$

Oder nach (9) S. 10:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\alpha^2}{\beta^2} a_{22} x_1^2 + a_{11} x_2^2 + \frac{1}{\beta^2} a_{44} x_3^2 + \alpha^2 a_{33} x_4^2 + \\ &+ 2 a_{12} \frac{\alpha}{\beta} x_1 x_2 + 2\alpha a_{13} x_2 x_4 + 2 \frac{1}{\beta} a_{14} x_2 x_3 + \\ &+ 2 \frac{\alpha^2}{\beta} x_1 x_4 + 2 \frac{\alpha}{\beta^2} a_{24} x_1 x_3 + 2 \frac{\alpha}{\beta} a_{34} x_3 x_4 = 0 \end{aligned} \right.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten in den Gleichungen (7) und (8) erhalten wir dann folgende Bedingungen zwischen den die Fläche bestimmenden Größen a_{ik}:

$$\varrho a'_{11} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} a_{22};\quad \varrho a_{22} = a_{11};\quad \varrho a_{33} = \frac{1}{\beta^2} a_{44};\quad \varrho a_{44} = \alpha^2 a_{33}$$

$$\varrho a_{23} = \frac{1}{\beta} a_{14};\quad \varrho a_{14} = \frac{\alpha^2}{\beta} a_{23};\quad \varrho a_{24} = \alpha a_{13};\quad \varrho a_{13} = \frac{\alpha}{\beta^2} a_{24};$$

$$\varrho a_{12} = \frac{\alpha}{\beta} a_{12},\quad \varrho a_{34} = \frac{\alpha}{\beta} a_{34};$$

Hieraus folgt aber: $\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$; oder $\varrho = \pm \frac{\alpha}{\beta}$

so daß wir also, je nachdem wir ϱ positiv oder negativ wählen, zwei verschiedene Systeme von Bedingungen, also auch zwei verschiedene Systeme von Flächen 2. Grades erhalten. Es kommt nämlich:

I. für negatives ϱ:

$$\underline{\beta a_{11} = -\alpha a_{22};\ \alpha\beta a_{33} = -a_{44};\ a_{24} = -\beta a_{13};}$$

$$\underline{a_{14} = -\alpha a_{23};\ a_{12} = 0;\ a_{34} = 0;}$$

II. für positives ϱ:

$$\underline{\beta a_{11} = \alpha a_{22};\ \alpha\beta a_{33} = a_{44};\ a_{24} = \beta a_{13};\ a_{14} = \alpha a_{23};}$$

Im ersten Fall haben wir 6 Bedingungen zwischen den 10 homogenen Größen a_{ik}, also eine dreifache Mannigfaltigkeit von Flächen, im zweiten Fall 4 Bedingungen, also ∞^5 Flächen. Alle diese Flächen werden durch die Kollineation $\mathfrak{C}$ in sich übergeführt, und ihre Polarsysteme transformieren infolgedessen auch C_1^1 in sich selbst. Somit gilt der Satz[1]):

Es gibt zwei Systeme von Flächen 2. Grades, für die eine lineare Strahlenkongruenz apolar ist, und zwar ∞^3 Flächen von der einen und ∞^5 Flächen von der

[1]) Vergl. v. Staudt. Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856. 1. Heft Nr. 105 und 109.

anderen Art. Die Koeffizienten ihrer Gleichungen genügen den Bedingungen I bezw. II.

Ein Vergleich mit den Resultaten auf Seite 14 lehrt:

Die Flächen des I. Systems sind Regelflächen, deren eine Regelschar aus Kongruenzstrahlen besteht, während die Strahlen der Leitschar durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet sind.

Zur Untersuchung der Flächen des Systems II. Art betrachten wir die Determinanten der Koeffizienten a_{ik}, die sich mit Hülfe der Bedingungen II. folgendermaßen darstellen läßt:

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (\beta\, a_{11}\, a_{33} - \beta\, a_{12}^2 - \alpha\, a_{23}^2 - a_{12}\, a_{34})^2 - \alpha\beta\,(a_{12}\, a_{33} + \frac{1}{\alpha}\, a_{11}\, a_{34} - 2\, a_{13}\, a_{23})^2;$$

Sie kann nur negativ werden, wenn $\alpha\beta > 0$; d. h. C_1^1 hyperbolisch ist. Wir schließen hieraus:

Im Falle der elliptischen Kongruenz sind die Flächen des II. Systems Regelflächen 2. Ordnung, im Falle der hyperbolischen Kongruenz jedoch

$$\left.\begin{array}{l}\text{geradlinig} \\ \text{nicht geradl.}\end{array}\right\} \text{je nachdem } (\beta a_{11} a_{33} - \beta a_{12}^2 - \alpha a_{21}^2 - a_{12} a_{34})^2 \gtrless |\alpha\beta|\,(a_{12}\, a_{33} + \frac{1}{\alpha}\, a_{11}\, a_{34} - 2 a_{13}\, a_{23})^2;$$

Ist eine Fläche des 2. Systems geradlinig und liegen die Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten x_i und y_i auf einem Regelstrahl, so sind ihnen durch C_1^1 zwei Punkte P_1' und P_2' (x'_i und y'_i) zugeordnet, die nach dem Vorhergehenden auf der Fläche liegen müssen, und deren Verbindungsgerade, wie sich zeigen läßt, ebenfalls der Fläche angehört. Denn die Bedingung hierfür:

$$\sum_{i=1}^{4} (a_{i_1}\, x'_1 + a_{i_2}\, x'_2 + a_{i_3}\, x'_3 + a_{i_4}\, x'_4)\, y'_i = 0$$

geht mit Hülfe der Gleichungen (9) S. 10, denen x_i und x'_i bezw. y_i und y'_i als Koordinaten zugeordneter Punkte genügen müssen, über in

$$\sum_{i=1}^{4} (a_{i_1} x_1 + a_{i_2} x_2 + a_{i_3} x_3 + a_{i_4} x_4)\, y_i = 0,$$

ist also erfüllt, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, die Gerade $\overline{P_1 P_2}$ ein Regelstrahl der Fläche ist. Da sich zwei durch C_1^1 zugeordnete Geraden im allgemeinen[1]) nicht schneiden, gehört $\overline{P'_1 P'_2}$ derselben Regelschar an, wie $\overline{P_1 P_2}$. Wir erhalten somit eine involutorische Paarung in beiden Regelscharen der Fläche. Also:

Die geradlinigen Flächen des 2. Systems sind involutorische Regelflächen.

Die Doppelelemente dieser Involutionen sind Strahlen von C_1^1. Jeder Fläche des 2. Systems gehören also höchstens 4 Kongruenzstrahlen an.

Da bei den Flächen des 1. Systems die eine Regelschar aus Kongruenzstrahlen besteht, so sind die Leitlinien von C_1^1 in allen diesen Flächen enthalten. Jede der Leitlinien ist also in einem Polarsystem der 1. Art zu sich selbst polar. Analytisch läßt sich dies auch leicht mit Hülfe der Gleichungen zeigen, die für die Linienkoordinaten (p_{ik} und p'_{ik}) zweier reziproken Polaren gelten:

$$(9)\quad \varrho\, p'_{14} = \alpha_{11}\, p_{23} + \alpha_{12}\, p_{31} + \alpha_{13}\, p_{12} + \alpha_{14}\, p_{14} + \alpha_{15}\, p_{24} + \alpha_{16}\, p_{34} \text{ etc.}$$

Es bedeuten hier die α_{ik} die Unterdeterminanten 2. Grades gebildet aus den Größen a_{ik}, die wir den Bedingungen I. zu unterwerfen haben. Wenden wir jedoch die Gleichungen

[1]) Sie schneiden sich nämlich nur dann, wenn die eine und folglich auch die andere mit einer der Leitgeraden von C_1^1 inzident ist und zwar im Schnittpunkt mit dieser Leitgeraden. Daß aber eine Fläche des 2. Systems die Leitgeraden nicht enthält, wird unten bewiesen.

(9) auf ein Polarsystem II. Art an, verlangen wir also, daß die a_{ik} den Bedingungen II. genügen, so zeigt sich, daß die Leitlinien in dem Polarsystem II. Art reziproke Polaren sind. Somit gilt:

In einem Polarsystem der 1. Art wird jede der Leitlinien von C_1^1 in sich transformiert, in einem Polarsystem 2. Art gehen sie jedoch wechselseitig in einander über.

Sind zwei Punkte P und P′ inbezug auf eine Fläche 2. Grades konjugiert, so erfüllen bekanntlich ihre Koordinaten (x_i und x'_i) die Gleichung:

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{4} (a_{i_1} x_1 + a_{i_2} x_2 + a_{i_3} x_3 + a_{i_4} x_4) x'_i = 0.$$

Bedeuten jedoch die x'_i die Koordinaten desjenigen Punktes, der dem Punkte P durch die Kongruenz C_1^1 zugeordnet ist, so können wir die Werte von x'_i aus den Gl. (9) S. 10 hierin einsetzen und erhalten:

$$a_{12} x_1^2 + \frac{\beta}{\alpha} a_{12} x_2^2 + \alpha a_{34} x_3^2 + \beta a_{34} x_4^2 + (a_{11} + \frac{\alpha}{\beta} a_{22}) x_1 x_2$$
$$+ (\alpha a_{33} + \frac{1}{\beta} a_{44}) x_3 x_4 + (a_{13} + \frac{1}{\beta} a_{24}) x_2 x_3 + (a_{14} + \alpha a_{23}) x_2 x_4$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{23} + \frac{1}{\beta} a_{14}\right) x_1 x_3 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{24} + \alpha a_{13}\right) x_1 x_4 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nur dann identisch erfüllt, wenn die a_{ik} den Bedingungen I. genügen, d. h. nur in einem Polarsystem 1. Art sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte konjugiert. Analog gestaltet sich der Beweis für konjugierte Ebenen, so daß wir gezeigt haben:

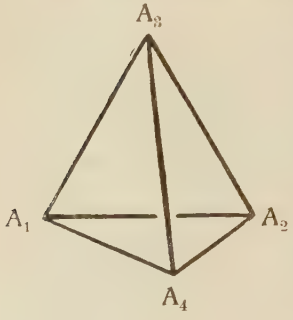
Die Polarsysteme 1. Art enthalten die durch C_1^1 in ihren Strahlen hervorgerufenen Punkt- und Ebeneninvolutionen, die Polarsysteme 2. Art enthalten diese Involutionen nicht.

Werden die beiden Regelscharen einer geradlinigen Fläche des 2. Systems (R_2) involutorisch gepaart, so sind

je 2 zugeordnete Strahlen einer Regelschar die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel, deren homologe Ebenen ebenfalls C_1^1 einander zuordnet. Legen wir, der einfacheren Darstellung halber, die Fläche R_2 so, daß die Kanten des Koordinatentetraëders in ihr enthalten sind, was ja durch Koordinatentransformation stets möglich ist, so lautet ihre Gleichung:

$$R_2 : a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{34}\, x_3\, x_4 = 0.$$

Die Koeffizienten erfüllen in der Tat die Bedingungen II.



Da die Eckpunkte A_1 und A_2 bezw. A_3 und A_4 in C_1^1 einander entsprechen, so sind die Kanten $A_1\, A_3$ und $A_2\, A_4$ zugeordnete Gerade derselben Regelschar, die wir somit als Achsen der beiden projektiven Ebenenbüschel wählen können. Die Gleichungen dieser Büschel lauten dann:

(11) (11a) $\quad x_1 + \lambda x_3 = 0; \quad x_2 + \mu x_4 = 0.$

Sie sind projektiv, wenn (12) $\alpha\lambda = \mu$ ist, und erzeugen dann eine Regelfläche 2. Ordnung (R_1), deren Gleichung wir durch Elimination von λ und μ aus (11), (11a) und (12) erhalten:

$$R_1 : x_2\, x_3 - \alpha x_1\, x_4 = 0.$$

Ganz analog können wir mit den Geraden $A_2\, A_3$ und $A_1\, A_4$ verfahren, die der andern Regelschar unserer Fläche R_2 angehören und ebenfalls durch C_1^1 einander zugeordnet sind. Wir erhalten die beiden projektiven Ebenenbüschel:

$$x_1 + \beta\lambda x_4 = 0; \quad x_2 + \lambda x_3 = 0$$

und als ihr Erzeugnis die Regelfläche

$$R_1' : x_1\, x_3 - \beta x_2\, x_4 = 0.$$

Was aber für die Strahlen $A_1\ A_3$ und $A_2\ A_4$ (bezw. $A_2\ A_3$ und $A_1\ A_4$) gilt, das gilt für jedes beliebige Paar zugeordneter Strahlen, die derselben Regelschar von R_2 angehören. Für je 2 Strahlen einer Regelschar erhalten wir eine Fläche R_1 bezw. R'_1 und können daher die Gesamtheit dieser Flächen mit der betreffenden Regelschar von R_2 *„verbunden"* nennen. Alle mit einer Regelschar verbundenen Flächen gehören dem System 1. Art an und haben folglich die (reellen oder imaginären) Leitgeraden von C_1^1 gemeinsam. Ferner gehen sie sämtlich durch die beiden Kongruenzstrahlen, die in der andern Regelschar enthalten sind. Alle haben somit die Seiten eines windschiefen Vierseits gemein und bilden folglich im F^2 Büschel. Kurz:

Mit jeder Regelschar einer geradlinigen Fläche R_2 des 2. Systems ist ein Büschel von Flächen des 1. Systems verbunden, die R_2 in je 2 zugeordneten Strahlen schneiden. Seine Grundkurve besteht aus den Leitgeraden von C_1^1 und aus den beiden zur Leitschar von R_2 gehörigen Kongruenzstrahlen.

Zu weiteren Beziehungen zwischen einer Fläche R_2 und den beiden mit ihr verbundenen Büscheln führt uns die Betrachtung der Polareigenschaften von R_2. Einem Punkt $P^0\ (x_i^0)$ ist inbezug auf die Fläche R_2 eine Ebene π^0 zugeordnet mit den Koordinaten:

$$(13) \qquad \varrho u_1^0 = a_{12} x_2^0;\ \varrho u_2^0 = a_{12} x_1^0;\ \varrho u_3^0 = a_{34} x_4^0;$$
$$\varrho u_4^0 = a_{34} x_3^0;$$

Liegt nun der Punkt P^0 auf einer der Flächen R_1 oder R'_1, die mit den Regelscharen von R_2 verbunden sind, so läßt sich zeigen, daß die Ebene π^0 Tangentialebene an diese Fläche ist. Die Gleichungen von R_1 bezw. R'_1 lauten nämlich in Ebenenkoordinalen:

$$R_1 : \alpha u_2 u_3 - u_1 u_4 = 0$$
$$R'_1 : \beta u_1 u_3 - u_2 u_4 = 0$$

Setzen wir hier die Werte von u_i^0 aus (13) ein, so folgt:

$$x_2^0\, x_3^0 - \alpha x_1^0\, x_4^0 = 0; \text{ bezw. } x_1^0\, x_3^0 - \beta x_2^0\, x_4^0 = 0$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung unmittelbar zu ersehen ist. Die Flächen R_1 und R'_1 sind also für das durch R_2 definierte Polarsystem apolar. Ganz ebenso kann man beweisen, daß R_2 durch die Polarsysteme von R_1 und R'_1 in sich übergeführt wird und ferner R_1 durch das Polarsystem von R'_1 und umgekehrt, so daß der Satz gilt:

Sind mit einer Regelfläche 2. Art R_2 zwei Büschel von Flächen 1. Art verbunden, so sind die Flächen dieser Büschel wechselseitig für einander polinvariant. Ebenso transformiert das durch R_2 definierte Polarsystem 2. Art jede Fläche der beiden Büschel in sich selbst und umgekehrt.

Alle die Resultate dieses Kapitels lassen sich nun ohne weiteres auf das Fokalparaboloid und die mit ihm verbundenen orthogonalen Regelflächen übertragen:

Das Fokalparaboloid von C_1^1 ist eine geradlinige Fläche des 2. Systems, mit der 2 Büschel von Flächen des 1. Systems verbunden sind.

Jede mit einer Fokalregelschar verbundene Regelfläche ist in dem durch das Fokalparaboloid definierten Polarsystem apolar, und umgekehrt wird das Paraboloid durch die Polarsysteme dieser Regelflächen in sich transformiert.

Das Polarsystem 1. Art jeder mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelfläche transformiert jede mit der anderen Fokalregelschar verbundene Fläche in sich selbst.

V. Konfokale, lineare Strahlenkongruenzen.

(Das Hauptachsenzylindroid.)

Nachdem wir im II. Kapitel aus den Eigenschaften einer linearen Strahlenkongruenz die Gleichung ihres Fokalparaboloids hergeleitet und dessen Fokalinvolutionen bestimmt haben, wollen wir nun die umgekehrte Aufgabe in Angriff nehmen und untersuchen, ob durch ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid und durch die beiden Involutionen seiner Regelstrahlen eine lineare Strahlenkongruenz definiert ist.

Es sei also ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid gegeben, dessen Gleichung wir in der Form annehmen können:

$$x_1 \cdot x_2 = -2c x_3 x_4 \tag{1}$$

und außerdem die involutorische Paarung der einen Regelschar durch die Gleichung

$$x_1 \cdot x'_1 = \varrho \tag{2}$$

wobei, wie es sein muß, dem unendlich fernen Strahl der Schar die zu derselben Regelschar gehörige Leitgerade des Paraboloids zugeordnet ist. Dann ist aber nach den Ausführungen von S. 18ff. die Involution der andern Regelschar bestimmt. Wir können also diese beiden Involutionen nur dadurch verändern, daß wir der Größe ϱ verschiedene Werte geben, und es gibt demgemäß ∞^1 lineare Strahlenkongruenzen mit gemeinsamem Fokalparaboloid. Diese heißen nach Jolles *„konfokal"*. Die Mittelebenen konfokaler linearer Kongruenzen fallen zusammen; sie sind die Tangentialebenen ihres gemeinsamen Fokalparaboloids, und wir erhalten demnach einen Kongruenzstrahl, wenn wir zwei normale Tangentialebenen zum Schnitt bringen. Analytisch stellt sich dies folgendermaßen dar: Wir nehmen 2 durch die Involution $x_1 x'_1 = \varrho$ konjugierte Regelstrahlen:

1) $x_1 = x_1^0;\ x_2 x_1^0 = -2cx_3$

2) $x_1 = \frac{\varrho}{x_1^0};\ x_2 \cdot \frac{\varrho}{x_1^0} = -2cx_3$

und legen durch diese je eine Ebene:

1) $x_1 - \mu x_2 - \mu \frac{2c}{x_1^0} x_3 - x_1^0 x_4 = 0$

2) $x_1 - \mu' x_2 - \mu' \frac{2cx_1^0}{\varrho} x_3 - \frac{\varrho}{x_1^0} x_4 = 0$

Sollen diese Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muß sein:

$$1 + \mu\mu' \left(1 + \frac{4c^2}{\varrho}\right) = 0;\ \text{oder}\ \mu' = -\frac{\varrho}{(\varrho + 4c^2)\mu};$$

Somit erhalten wir einen Kongruenzstrahl als Schnitt der Ebenen:

1) $x_1 - \mu x_2 - \mu \frac{2c}{x_1^0} x_3 - x_1^0 x_4 = 0$

2) $x_1 + \frac{\varrho}{(\varrho + 4c^2)\mu} x_2 + \frac{2cx_1^0}{(\varrho + 4c^2)\mu} x_3 - \frac{\varrho}{x_1^0} x_4 = 0$

Der gesuchte Strahl hat also die Linienkoordinaten:

$$p_{14} = \begin{vmatrix} u_2 & u'_2 \\ u_3 & u'_3 \end{vmatrix} = \frac{2c(\varrho - x_1^{0\,2})}{x_1^0(\varrho + 4c^2)};\quad p_{34} = \frac{2\varrho + 4c^2}{\mu(\varrho + 4c^2)};$$

$$p_{31} = \frac{\mu\varrho}{x_1^0} + \frac{\varrho x_1^0}{\mu(\varrho + 4c^2)};\quad p_{12} = \frac{2\mu c\varrho}{x_2^{0\,2}} + \frac{2cx_1^{0\,2}}{\mu(\varrho + 4c^2)}$$

$$p_{24} = -\frac{2\mu c}{x_1^0} - \frac{2cx_1^0}{\mu(\varrho + 4c^2)};\quad p_{23} = \frac{x_1^{0\,2} - \varrho}{x_1^0};$$

Zwischen diesen bestehen aber die linearen Beziehungen:

$$(3)\qquad \underline{p_{23} + \frac{\varrho + 4c^2}{2c} p_{14} = 0;} \qquad \underline{p_{31} + \frac{\varrho}{2c} p_{24} = 0,}$$

so daß wir also jede der konfokalen Strahlenkongruenzen mit dem gemeinsamen Fokalparaboloid (1) als Schnitt zweier linearer Komplexe erhalten, die durch die Gleichungen (3) dargestellt sind. Unter diesen ∞^1 linearen Strahlenkon-

gruenzen befinden sich zwei parabolische; für sie nimmt der Parameter ϱ die Werte an:

$$1)\ \varrho_1 = 0; \quad 2)\ \varrho_2 = -4c^2.$$

Ihre Leitgeraden sind bezw. die y und x-Achse, in die dann die beiden Fokalachsen der betreffenden Fokalregelschar zusammenfallen.

Die Gesamtheit aller linearer Strahlenkongruenzen mit dem gemeinsamen Fokalparaboloid (1) bilden einen quadratischen Komplex, dessen Gleichung durch Elimination von ϱ aus (3) entsteht:

$$(4) \qquad \underline{p_{23}\, p_{24} + p_{13}\, p_{14} + 2c\, p_{14}\, p_{24} = 0}$$

Durch jeden Punkt (y_i) sendet der Komplex einen Strahlenkegel, dessen Gleichung in laufenden Koordinaten x_i lautet:

$$x_1^2\, y_3\, y_4 + x_2^2\, y_3\, y_4 + 2c\, x_1^2\, y_1\, y_2 + 2c\, x_1\, x_2\, y_4^2 - x_1\, x_3\, y_1\, y_4 - x_1\, x_4\, (y_1\, y_3 + 2c\, y_2\, y_4) - x_2\, x_4\, (2c y_1\, y_4 + y_2\, y_3) - x_2\, x_3\, y_2\, y_4 + x_3\, x_4\, (y_1^2 + y_2^2) = 0$$

Untersuchen wir nun, wann dieser Kegel in 2 Ebenen zerfällt, d. h. fragen wir nach der Kummerschen Singularitätenfläche, so erhalten wir für die Koordinaten der Kegelspitze die Bedingung:

$$2c y_1\, y_2\, y_4^4 - (y_2^2 + y_1^2)\, y_3\, y_4^3 = 0.$$

Hier läßt sich y_4 als Faktor ausscheiden. Die Kummersche Singularitätenfläche besteht also aus der unendlich fernen Ebene: $y_4 = 0$ und einer Fläche 3. Grades:

$$(5) \qquad y_3 = 2c \frac{y_1\, y_2\, y_4}{y_1^2 + y_2^2};$$

diese ist das *„Hauptachsenzylindroid"* unserer konfokalen Strahlenkongruenzen, auf das wir kurz eingehen wollen.

Unter dem Hauptachsenzylindroid einer linearen Strahlenkongruenz $p_{23} + \alpha p_{14} = 0$; $p_{13} + \beta p_{34} = 0$; wo $\alpha = \frac{\varrho + 4c^2}{2c}$; $\beta = -\frac{\varrho}{2c}$; $\varrho = \text{const.}$ ist, versteht man

bekanntlich den Ort der Hauptachsen des Komplexbüschels, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$(6) \qquad p_{23} + \alpha p_{14} + \lambda (p_{13} + \beta p_{24}) = 0.$$

Als Hauptachse eines Komplexes ist dabei diejenige Gerade definiert, der inbezug auf den Komplex die zu ihr orthogonale, unendlich ferne Gerade konjugiert ist. Wollen wir also die Gleichung des Hauptachsenzylindroids aus dieser Definition herleiten, so haben wir zunächst die Orthogonalitätsbedingungen zwischen den Linienkoordinaten q_{ik} einer Hauptachse und den Koordinaten $p_{12}, p_{23}, p_{31}, 0, 0, 0$ einer unendlich fernen Geraden (p_{ik}) aufzustellen. Da die Größen $p_{12}\, p_{23}\, p_{31}$ die Stellungscos der durch die Gerade p_{ik} gehenden parallelen Ebenen sind, so lauten diese Bedingungen:

$$(7) \qquad p_{12} : p_{23} : p_{31} = q_{34} : q_{14} : q_{24}$$

Die der Geraden p_{ik} inbezug auf den Komplexbüschel (6) konjugierte Gerade hat dann die Koordinaten (vergl. (4) S. 7):

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma q_{12} = -(\alpha - \lambda^2\beta)\, p_{12}; & \sigma q_{14} = p_{23} + \lambda p_{13}; \\ \sigma q_{23} = (\alpha p_{13} + \lambda\beta p_{23})\, \lambda; & \sigma q_{24} = -\lambda (p_{23} + \lambda p_{13}); \\ \sigma q_{31} = \alpha p_{13} + \lambda\beta p_{23}; & \sigma q_{34} = 0; \end{cases}$$

Soll diese die unendlich ferne Gerade p_{ik} rechtwinklig kreuzen, so folgt nach (7):

$$(9) \qquad q_{12} = p_{12} = 0 \text{ und } p_{23}\, q_{24} = p_{31}\, q_{14}$$

oder, indem wir nach (8) die p_{ik} durch q_{ik} ausdrücken:

$$(10) \quad -\lambda q_{31}\, q_{24} + \alpha q_{14}\, q_{24} + q_{31}\, q_{14} - \lambda\beta q_{14}^2 = 0$$

Dieser Gleichung genügen also die Koordinaten sämtlicher Hauptachsen des Büschels (6). Wollen wir nun deren geometrischen Ort durch eine Gleichung in Punktkoordinaten darstellen, so eliminieren wir den Parameter λ mittelst der aus (8) folgenden Beziehung:

$$q_{23} = \lambda q_{31}$$

und ersetzen dann die Linienkoordinaten durch Punktkoordinaten dadurch, daß wir jede Hauptachse durch 2 Punkte (x_i und x'_i) gehen lassen und für q_{ik} die Determinante $\begin{vmatrix} x_i & x'_i \\ x_k & x'_k \end{vmatrix}$ schreiben. Da aber nach (8) und (9) die Größen q_{12} und q_{34} verschwinden, so schneiden sämtliche Hauptachsen die z-Achse rechtwinklig, und wir können somit zu ihrer Bestimmung die beiden Punkte: 0, 0, x_3, 1 und x_1, x_2, x_3, 1 wählen. Setzen wir dies in die Gleichung (10) ein, so erhalten wir für die gesuchte Gleichung des Zylindroids:

$$(11) \qquad x_3 = (\alpha + \beta)\frac{x_1 x_2 x_4}{x_1^2 + x_2^2} = 2c\frac{x_1 x_2 x_4}{x_1^2 + x_2^2}$$

wie wir es oben schon für einen Bestandteil der Kummerschen Singularitätenfläche gefunden haben.

Die Gleichung (11), die wir für das Hauptachsenzylindroid einer beliebigen der konfokalen Strahlenkongruenzen (3) S. 40 abgeleitet haben, ist unabhängig von dem Parameter ϱ, der für jede einzelne der konfokalen Kongruenzen charakteristisch ist. Wir können demnach sagen:

Konfokale, lineare Strahlenkongruenzen haben dasselbe Hauptachsenzylindroid.

Und umgekehrt:

Lineare Strahlenkongruenzen mit gemeinsamem Hauptachsenzylindroid sind konfokal.

Ist das Hauptachsenzylindroid gegeben, so können wir zu dem zugehörigen Fokalparaboloid durch folgende Konstruktion gelangen:

Wir errichten auf einer Tangential-Ebene des Zylindroids:

$$(cx'_2x'_3 - x'_1x'_2)x_1 + (cx'_1x'_4 - x'_2x'_3)x_2 - \frac{x'^2_1 + x'^2_2}{2}x_3 + \\ + cx'_1x'_2x_4 = 0$$

in ihrer Schnittgeraden mit der xy-Ebene die Normalebene. Deren Gleichung ist:

$$(cx'_2x'_4 - x'_1x'_2)x_1 + (cx'_1x'_4 - x'_2x'_3)x_2 - \mu x_3 + cx'_1x'_2x_4 = 0$$

$$\text{wo } \mu = -2\frac{(cx'_2x'_4 - x'_1x'_2)^2 + (cx'_1x'_4 - x'_2x'_3)^2}{x'^2_1 + x'^2_2} \cdot x'_1x'_2,$$

und wir behaupten, daß diese Ebene eine Tangential-Ebene an das Fokalparaboloid ist, daß also ihre Koordinaten der Gleichung genügen:

$$u_1u_2 = -\frac{1}{2c}u_3u_4$$

Dies läßt sich aber in der Tat leicht verifizieren, wenn man nur dabei berücksichtigt, daß die Größen x'_i einen Punkt des Zylindroids darstellen, also die Gleichung (11) befriedigen. Ebenso kann man zeigen, daß eine Ebene, die senkrecht auf einer Tangentialebene an das Paraboloid in deren Schnittgeraden mit der xy-Ebene errichtet wird, das Zylindroid (11) berührt. Somit gelten die Sätze:

Werden auf den Tangentialebenen eines Zylindroids (11) in ihren Schnittgeraden mit der xy-Ebene Normalebenen errichtet, so umhüllen diese ein gleichseitiges Paraboloid (1).

Werden auf den Tangentialebenen eines gleichseitigen Paraboloids (1) in ihren Schnittgeraden mit seiner Scheitelebene Normalebenen errichtet, so umhüllen diese ein Zylindroid.

Das gleichseitige Paraboloid (1) und das Zylindroid (11) heißen daher nach Jolles miteinander *„orthogonal verknüpft"*. Die Scheitelstrahlen und die Hauptachse des Paraboloids sind die Symmetrieachsen des mit ihm orthogonal verknüpften Zylindroids. Beide Flächen haben die x- und y-Achse gemein; aber abgesehen davon trifft kein Regelstrahl des Zylindroids das mit ihm orthogonal verknüpfte Paraboloid in reellen Punkten. Ist nämlich ein solcher Regelstrahl dargestellt durch:

$$\varrho x_1 = x_2; \text{ und } x_3 = \frac{2c\varrho}{1+\varrho^2} x_4$$

so muß man, um seinen Schnittpunkt mit dem Paraboloid zu finden, hieraus x_2 und x_3 in Gleichung (1) einsetzen. Es kommt dann

$$x_1^2 = -\frac{4c^2}{1+\varrho^2} \text{ also für } x_1 \text{ ein imaginärer Wert.}$$

Eine weitere Beziehung zwischen Paraboloid (1) und Zylindroid (11) folgt aus den Polareigenschaften des Paraboloids: Suchen wir nämlich die reziproken Polaren eines Regelstrahls des Zylindroids inbezug auf das Paraboloid zu finden, so stellen wir zunächst diesen Regelstrahl:

$$x_2 = \varrho x_1; \; x_3 = \frac{2c\varrho}{1+\varrho^2} x_4$$

in Linienkoordinaten dar und erhalten:

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = 2c\varrho^2 : -2c\varrho : 0 : (1+\varrho^2) : (1+\varrho^2)\varrho : 0$$

Seine reziproke Polare inbezug auf das Paraboloid (1) ist dann nach den Gleichungen (9) S. 34:

$$p'_{23} : p'_{31} : p'_{12} : p'_{14} : p'_{24} : p'_{34} = p_{14} : -p_{24} : 0 : p_{23} : -p_{31} : 0$$
$$= (1+\varrho^2) : -\varrho(1+\varrho^2) : 0 : 2c\varrho^2 : 2c\varrho : 0$$

oder:

$$\varrho x_1 = -x_2; \; x_3 = -\frac{2c\varrho}{1+\varrho^2} x_4$$

Wir erhalten also wieder einen Regelstrahl des Zylindroids, und zwar denjenigen, der aus dem ersten durch Spiegelung an der x- oder y-Achse entsteht. Also:

Das Zylindroid wird in dem Polarsystem des mit ihm orthogonal verknüpften Paraboloids derart in sich übergeführt, daß zwei seiner Regelstrahlen, die an einer der Symmetrieachsen (x und y) ineinander gespiegelt werden, in diesem Polarsystem reziproke Polaren sind.

Ferner können wir, ausgehend von dem Paraboloid,

durch folgende Überlegung zu dem mit ihm orthogonal verknüpften Zylindroid gelangen. Wir behaupten nämlich:

Die Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloids, die mit seiner Hauptachse inzident sind, bilden die Regelschar des mit ihm orthogonal verknüpften Zylindroids.

Zum Beweis denken wir uns das Koordinatensystem worauf das Paraboloid $x_1 x_2 = -2cx_3 x_4$ bezogen ist, um den Winkel $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ um die z-Achse gedreht. Seine Gleichung geht dann über in:

(12) $x'^2_1 \sin\varphi + 2 x'_1 x'_2 \cos\varphi - x'^2_2 \sin\varphi = -4 c x'_3 x'_4$

und eine Tangentialebene ist dargestellt durch:

(13) $(\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi) x'_1 + (\xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi) x'_2 + 2c\xi_4 x'_3 + 2c\xi_3 x'_4 = 0.$

wo die ξ_i die Koordinaten des Berührungspunktes inbezug auf das gedrehte System bedeuten. Die Ebene (13) steht senkrecht auf der Koordinatenebene (y'z'), wenn

(14) $\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi = 0$ ist.

Nun umhüllen sämtliche Tangentialebenen das Paraboloid, die auf der y'z'-Ebene senkrecht stehen, den Zylinder:

(15) $u'^2_2 = \frac{u'_3 u'_4}{\sin\varphi}$; oder $x'^2_2 = 4c \sin\varphi x'_3 x'_4$;

denn die Gleichung:

$$(\xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi)^2 = \frac{4c^2 \xi_3 \xi_4}{\sin\varphi}$$

geht mit Hülfe der Bedingung (14) über in

$$\xi_1^2 \sin\varphi + 2\xi_1 \xi_2 \cos\varphi \quad \xi_2^2 \sin\varphi = -4c \xi_3 \xi_4;$$

sie ist also richtig, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, der Punkt mit den Koordinaten ξ_i auf dem Paraboloid liegt. Nun ist aber die Fokalachse des Zylinders (15) mit der Hauptachse (z-Achse) des Paraboloids inzident. Ihre Gleichungen sind nämlich:

(16) $$x'_2 = 0 \text{ und } x'_3 = c \sin \varphi\, x'_4$$

und wir erhalten also sämtliche mit der z-Achse inzidenten Fokalachsen des Paraboloids, wenn wir dem Winkel φ alle möglichen Werte geben. Da aber $\varphi = 2\alpha$ ist, geht Gleichung (16) über in

$$x'_2 = 0;\ x'_3 = c \sin 2\alpha\, x'_4$$

Kehren wir jetzt wieder zu unserem ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so kommt:

(17) $$x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha = 0;\ x_3 = 2c \sin \alpha \cos \alpha\, x_4$$

und wir erhalten den geometrischen Ort sämtlicher Fokalachsen, wenn wir hieraus α eliminieren; es folgt:

$$x_3 = 2c \frac{x_1 x_2 x_4}{x_1^2 + x_2^2}$$

also in der Tat, wie in unsern Satze behauptet war, die Gleichung des Zylindroids, das mit dem gegebenen Paraboloid orthogonal verknüpft ist.

VI. Die rotatorische, lineare Strahlenkongruenz.

Machen wir in den Gleichungen

$$p_{23} + \alpha\, p_{14} = 0;\ p_{13} + \beta\, p_{24} = 0$$

die unsere lineare Kongruenz definieren, die spezielle Annahme

$$\alpha + \beta = 0$$

so gehen sie über in

(1) $$p_{23} + \alpha\, p_{14} = 0;\ p_{13} - \alpha\, p_{24} = 0$$

und wir erhalten den Fall der *„rotatorischen"* linearen Strahlenkongruenz R_1^1. Da α und $\beta = -\alpha$ verschiedenes Zeichen haben, so *ist* R_1^1 *elliptisch*; die Fokalachsen fallen in die z-Achse zusammen. *Die rotatorische lineare Kongruenz geht durch Rotation um die z-Achse in sich selbst über; jeder Strahl der xy-Ebene, der die*

z-Achse schneidet, ist Symmetrieachse von R_1^1. Drehen wir nämlich das Koordinatensystem um z um einen Winkel α, so wird:

$$x'_1 = b\,x_1 + a\,x_2;\ x'_2 = -a\,x_1 + b\,x_2;\ x'_3 = x_3;\ x'_4 = x_4,$$

wenn wir $a = \sin\alpha$ und $b = \cos\alpha$ setzen. Die Gleichungen (1):

$$x_2\,y_3 - x_3\,y_2 + \alpha\,(x_1\,y_4 - x_4\,y_1) = 0$$
$$x_1\,y_3 - x_3\,y_1 - \alpha\,(x_2\,y_4 - x_4\,y_2) = 0$$

gehen dann über in:

$$(-ax'_1 + bx'_2)\,y'_3 - (-ay'_1 + by'_2)\,x'_3 + \alpha\,(bx'_1 + ax'_2)\,y'_4 - \alpha\,(by'_1 + ay'_2)\,x'_4 = 0$$

$$(bx_1 + ax_2)\,y'_3 - (by'_1 + ay'_2)\,x'_3 - \alpha\,(-ax'_1 + bx'_2)\,y'_4 - \alpha\,(-ay'_1 + by'_2)\,x'_4 = 0$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit a, die zweite mit b und addieren bezw. subtrahieren, so folgt:

$$x'_2\,y'_3 - x'_3\,y'_2 + \alpha\,(x'_1\,y'_4 - x'_4\,y'_1) = 0$$
$$x'_1\,y'_3 - x'_3\,y'_1 - \alpha\,(x'_2\,y'_4 - x'_4\,y'_2) = 0$$

oder:

$$(2) \qquad p'_{23} + \alpha p'_{14} = 0;\ p'_{13} - \alpha p'_{24} = 0$$

wo jetzt die p'_{ik} auf das gedrehte System zu beziehen sind. Aus (2) schließt man aber, ebenso wie S. 10, daß die x'-, y'- und z'-Achse Symmetrieachsen für R_1^1 sind, und da die Gleichungen unabhängig von dem Winkel α gelten, so gilt dies für jede Gerade, die in der xy-Ebene senkrecht zu z errichtet ist.

Die Strahlen dieses Strahlenbüschels bilden aber auch die Regelstrahlen des zu R_1^1 gehörigen Hauptachsenzylindroids. Die Gleichung des Zylindroids, die sich auch in der Form:

$$\frac{x_1}{x_2} = \operatorname{cotg}\varphi;\ x_3 = \frac{\alpha + \beta}{2}\sin\varphi\cos\varphi\,x_4$$

schreiben läßt, geht nämlich für $\alpha = -\beta$ über in

$$\frac{x_2}{x_1} = \operatorname{tg}\varphi;\ x_3 = 0.$$

Die Regelstrahlen des Hauptachsenzylindroids sind also nach dem Vorhergehenden sämtlich Symmetrieachsen für R_1^1, und je zwei zu einander senkrechte sind die Achsen zweier für einander nullinvarianten Strahlenkomplexe.

Das Fokalparaboloid von R_1^1

$$u_1 u_2 (\alpha + \beta) = u_3 u_4 = 0$$

zerfällt in 2 Ebenenbündel:

$$1)\ u_4 = 0;\ \ 2)\ u_3 = 0$$

deren Mittelpunkte im Koordinaten Anfangspunkt und im unendlich fernen Punkt der z-Achse liegen. Sie sind kollinear, wenn wir in beiden Bündeln Ebenen und Strahlen einander als entsprechend zuweisen, die sich in der involutorischen Kollineation von R_1^1 entsprechen, und haben die z-Achse entsprechend gemein. Die z-Achse ist ferner nach den Ausführungen von Kapitel II die einzige Rotationsachse von Rotationsflächen, deren eine Regelschar in R_1^1 enthalten ist, und zwar haben diese Flächen die Gleichung:

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}(x_3^2 + \alpha^2 x_4^2) = 0.$$

Sie bilden ein F^2-Büschel mit z als gemeinsamer Rotationsachse. Die Polarsysteme dieser Flächen sind die einzigen rotatorischen Polarsysteme I. Art von R_1^1.

Allgemein gilt jetzt für Flächen, des 1. Systems (vergl. Kap. IV) die Gleichung:

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}(x_3^2 + \alpha^2 x_4^2) + 2a_{13}(x_1 x_3 - \alpha^2 x_2 x_4) + 2a_{23}(x_2 x_3 - \alpha^2 x_1 x_4) = 0.$$

Alle diese Flächen haben folglich parallel zur xy-Ebene Kreisschnitte.

Lebenslauf.

Ich, Hans Schlusser, Sohn des verstorbenen Ministerialrats Dr. Gustav Schlusser, protestantischer Konfession, bin geboren am 14. April 1888 zu Bruchsal in Baden. Ich besuchte die Elementarschule in Lahr und das Gymnasium zuerst in Lahr, dann in Karlsruhe, wo ich 1906 das Abiturientenexamen bestand. Nach Ableistung meiner militärischen Dienstpflicht widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften und zwar während zwei Semestern an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, je einem Semester an den Universitäten München und Berlin und vier Semestern an der Universität Straßburg i. E. All den Herrn Professoren, bei denen ich im Laufe meiner Studien Vorlesungen und Seminarien besuchte, bin ich zu größtem Dank verpflichtet. Es waren dies in Karlsruhe: die Herren Engler, Krazer, Paulcke, Schur, Stäckel; in München: die Herren: Pringsheim, Sommerfeld, Voß; in Berlin: die Herren Frobenius, Knoblauch, Planck, Wehnelt; in Straßburg: die Herren: Braun, Bücking, Cohn, Epstein, Schur, Weber, Wellstein. Ganz besonders herzlichen Dank möchte ich aber auch hier Herrn Professor Schur in Straßburg aussprechen, der zuerst in Karlsruhe in mir die Lust und Liebe zu meinem Beruf zu wecken wußte und dessen Seminar ich dann in Straßburg als begeisterter Schüler angehören durfte. Mit wohlwollendem Interesse für meine Ausbildung ist er mir stets zur Seite gestanden und hat mich durch seinen gütigen Ratschlag vor mancher Enttäuschung bewahrt. Ihm verdanke ich auch die Anregung zu dieser Arbeit und manchen guten Rat bei ihrer Anfertigung.

Karlsruhe, den 4. September 1912.